Matematičko modeliranje ekonomskih procesa pomoću običnih diferencijalnih jednadžbi

Mršić, Ivan

Undergraduate thesis / Završni rad (sveučilišni)

2025

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Split, Faculty of Science / Sveučilište u Splitu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:166:748163

Rights / Prava: Zaštićeno autorskim pravom. / In copyright.

Download date / Datum preuzimanja: **2026-09-03**

Repository / Repozitorij:

Digital Repository of Faculty of Science in Split / Digitalni repozitorij Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Splitu

Dabar

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

IVAN MRŠIĆ

MATEMATIČKO MODELIRANJE EKONOMSKIH PROCESA POMOĆU OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI

ZAVRŠNI RAD

Split, rujan 2025.

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ODJEL ZA MATEMATIKU

MATEMATIČKO MODELIRANJE EKONOMSKIH PROCESA POMOĆU OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI

ZAVRŠNI RAD

Student:
Ivan Mršić

Mentorica:
doc.dr.sc. Andrijana Ćurković

Split, rujan 2025.

Zahvala

Gospodine, zahvaljujem Ti na blagoslovima koje si podario meni i mojoj obitelji; na snazi koju mi svakoga dana daješ i na ljudima oko mene koji čine moj život značajnijim. Tebi prije svega ide moja hvala. Hvala Ti na Tvojoj ljubavi prema meni. Soli Deo gloria.

Veliko hvala mojoj mentorici doc.dr.sc. Andrijani Ćurković na svim detaljnim uputama i savjetima. Hvala joj, jer mi je pomogla da prepoznam ljepotu matematike, strpljivo objašnjavajući i odgovarajući s lakoćom na sva moja pitanja i ideje. Hvala joj na susretljivosti!

Beskrajno hvala mojim roditeljima, Nediljku i Mirjani, na vašoj ljubavi, na daru života i na svemu što ste uložili u mene kroz sve ove godine; hvala vam na brizi i svim molitvama.

Hvala braći Marinu, Stipi, Josipu i Luki te sestrama Ani, Petri i Mihaeli. Hvala što ste me bodrili i poticali na ovom putu, što ste bili strpljivi sa mnom i na svim poslovima koje ste morali napraviti umjesto mene jer sam se spremao za ispit :).

Hvala didu Mirku i baki Mariji, didu Slavku i baki Anđi. Hvala vam na vašoj ljubavi, molitvama i zaštiti, na vašim mislima i vašoj dobroti.

Hvala svim mojim prijateljima, kolegama, poznanicima i svima drugima koji su na razne načine obilježili ovo moje studiranje — za sve odgovore na moja „glupa“ pitanja, zadatke i informacije koje ste dijelili sa mnom. Hvala

vam na vašoj podršci i svim riječima ohrabrenja.

Hvala mojoj Marijani na ljubavi.

Također, posebno zahvaljujem svim svojim profesorima na susretljivosti, vremenu i želji da nam prenesete znanje; što smo vam bili važni i što ste pronalazili vrijeme za nas u vašim rasporedima. Hvala na Matematičkom klubu i vašim drugim inicijativama koje potiču zajedništvo i nove ideje na našem fakultetu.

I naravno najboljoj studentskog referadi. Vinka od srca hvala!

Svima vam zahvaljujem — sve je bilo lakše zbog vas!

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU
ODJEL ZA MATEMATIKU

ZAVRŠNI RAD

MATEMATIČKO MODELIRANJE EKONOMSKIH PROCESA POMOĆU OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI

Ivan Mršić

Sažetak:

Ovaj rad bavi se primjenom običnih diferencijalnih jednadžbi (ODJ) u modeliranju ekonomskih i financijskih procesa. Fokus je stavljen na klasične determinističke modele ekonomskog rasta, kao što su modeli Harroda-Domara, Solowa, Phelpsa i Phillipsa, te na analizu dinamike investicija u poduzećima kroz modele poput Kaleckijevog i Goodwinovog. Posebna pažnja posvećena je formalnom matematičkom oblikovanju modela, kao i interpretaciji njihovih ekonomskih značenja, uključujući stabilnost, ravnotežu i dinamiku sustava s vremenskim kašnjenjem. Cilj rada je pokazati kako se ODJ koriste kao alat za kvantitativnu analizu ekonomskih pojava i za izgradnju prediktivnih modela. Stohastički modeli nisu razmatrani jer nadilaze razinu preddiplomskog studija.

Ključne riječi:

diferencijalne jednadžbe, ekonomski rast, investicije, deterministički modeli, matematičko modeliranje.

Podatci o radu:

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

XIV, 26 stranica, 5 slika, 10 literaturna navoda. Izvornik je na hrvatskom jeziku.

Mentorica: *doc.dr.sc. Andrijana Ćurković*

Članovi povjerenstva:

doc.dr.sc. Andrijana Ćurković

doc.dr.sc. Tanja Vojković

dr.sc. Stipe Marić

Povjerenstvo za završni rad je prihvatilo ovaj rad *9.9.2025.*

BASIC DOCUMENTATION CARD

FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF SPLIT
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

UNDERGRADUATE'S THESIS

MATHEMATICAL MODELING OF ECONOMIC PROCESSES USING ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Ivan Mršić

Abstract:

This thesis explores the application of ordinary differential equations (ODE) in modeling economic and financial processes. The focus is on classical deterministic models of economic growth, such as the Harrod-Domar, Solow, Phelps, and Phillips models, as well as on the analysis of investment dynamics in firms through models by Kalecki and Goodwin. Special attention is given to the formal mathematical formulation of the models and to the interpretation of their economic implications, including stability, equilibrium, and delayed response dynamics. The aim of this work is to demonstrate how ODEs serve as a tool for the quantitative analysis of economic phenomena and for building predictive models. Stochastic models are not included as they exceed the scope of the undergraduate level.

Key words:

differential equations, economic growth, investments, deterministic models, mathematical modeling.

Specifications:

XIV, 26 pages, 5 pictures, 10 references. Original language: Croatian

Supervisor: *doc.dr.sc. Andrijana Ćurković*

BASIC DOCUMENTATION CARD

Committee:

Asst. Prof. Andrijana Ćurković

Asst. Prof. Tanja Vojković

Instr. Stipe Marić

This thesis was approved by a Thesis commettee on *9th September 2025*

IZJAVA

kojom izjavljujem s punom materijalnom i moralnom odgovornošću da sam završni rad s naslovom „Matematičko modeliranje ekonomskih procesa pomoću običnih diferencijalnih jednadžbi" izradio samostalno pod mentorstvom doc.dr.sc. Andrijane Ćurković. U radu sam primijenio metodologiju znanstvenoistraživačkog rada i koristio literaturu koja je navedena na kraju završnog rada. Tuđe spoznaje, stavove, zaključke, teorije i zakonitosti koje sam izravno ili parafrazirajući naveo u završnom radu na uobičajen, standardan način citirao sam i povezao s fusnotama s korištenim bibliografskim jedinicama. Rad je pisan u duhu hrvatskog jezika.

Student

Ivan Mršić

DECLARATION

I declare, with full material and moral responsibility, that I have independently written the thesis titled "Mathematical modeling of economic processes using ordinary differential equations" under the mentorship of doc.dr.sc. Andrijana Ćurković. In the thesis, I have applied scientific research methodology and used literature listed at the end of the thesis. The insights, opinions, conclusions, theories, and principles of others that I have directly quoted or paraphrased in the thesis have been cited in the usual, standard manner and linked to the corresponding bibliographic sources.

Student

Ivan Mršić

Uvod

Primjena matematičkih metoda u ekonomiji i financijama igra ključnu ulogu u razumijevanju i kvantitativnom modeliranju ekonomskih pojava. Među tim metodama, obične diferencijalne jednadžbe (ODJ) istaknute su kao temeljni alat za opisivanje dinamike promjena ekonomskih veličina kroz vrijeme.

U ovom radu analiziramo kako se ODJ koriste za modeliranje rasta bruto domaćeg proizvoda (BDP), kapitalne akumulacije, potrošnje, investicija i poslovnih ciklusa. Poseban naglasak stavlja se na klasične deterministčke modele gospodarskog rasta, uključujući modele Harroda-Domara, Solowa i Phelpsa, te na dinamičke modele investiranja koje su predložili Kalecki i Goodwin. Fokus ostaje na deterministčkim formulacijama jer su stohastički pristupi matematički zahtjevniji i nadilaze razinu preddiplomskog studija.

Izvori koji su temeljili strukturiranje ovog rada su pregled Tsoularis [10], koji donosi klasifikaciju i analizu diferencijalnih jednadžbi u ekonomskoj dinamici, te rad Lee i Shi [7], koji ilustrira alternativne metode rješavanja ekonomskih modela pomoću ODJ.

Matematičko modeliranje ekonomskih sustava koristi prednosti ODJ zbog njihove sposobnosti da precizno opišu mehanizme povratne sprege, stabilnosti i dugoročne ravnoteže. Iako su diskretni modeli češće primjenjivani u empirijskim analizama, kontinuirani modeli s ODJ olakšavaju teorijsku analizu stabilnosti, osobito kod autonomnih i linearnih sustava. Također, modeli s

vremenskim kašnjenjem (engl. delay differential equations) analizirani su u kontekstu poslovnih ciklusa.

Za produbljeno razumijevanje preporučuje se literatura autora kao što su Gandolfo [3] (za temeljne pristupe), Brock i Malliaris [6] (za formalniju dinamiku), te Acemoglu [1] za moderni matematički pristup teoriji rasta.

Sadržaj

Zahvala **iii**

Uvod **xi**

Sadržaj **xiii**

1 Osnovni modeli ekonomskog rasta **1**

1.1 Harrod-Domarov model 2

1.2 Solowov model 3

1.3 Phelpsovo zlatno pravilo 7

1.4 Samuelsonov model tržišne ravnoteže 9

1.5 Kaleckijev model s odgođenom investicijom 13

1.6 Goodwinov nelinearni model poslovnih ciklusa 14

1.7 Primjer: Dinamičko ponašanje u Goodwinovom modelu 17

2 Primjena diferencijalnih jednadžbi u optimiranju dobiti **19**

2.1 Model rasta bruto domaćeg proizvoda (BDP) 19

2.2 Model investiranja poduzeća 20

2.3 Primjena propozicije 1: Optimalna investicijska politika 22

3 Zaključak **24**

Literatura **25**

Poglavlje 1

Osnovni modeli ekonomskog rasta

U ovom poglavlju predstavljamo neke od najvažnijih diferencijalnih jednadžbi koje modeliraju probleme iz ekonomije, a razvijale su se tijekom više od 60 godina. Većina modela potječe iz neoklasične teorije rasta, koja se temelji na ideji da je rast potaknut povećanjem kapitala, radne snage i tehnološkim napretkom. Odnosno, da u stanju dugoročne stabilne ravnoteže, bez postojanja tehnološkog napretka nema porasta dohotka po stanovniku. Posebice se ističe Solowov model iz 1956. godine, koji je djelomično nadahnut radovima Harroda i Domara.

Solowov model, utemeljen na pretpostavkama neoklasične teorije rasta, polazi od toga da gospodarski rast proizlazi iz triju čimbenika: rada, kapitala i tehnologije. Zbog svoje jednostavnosti i analitičke snage, Solowov model često je prvi koji se obrađuje u kolegijima s matematičkim pristupom ekonomiji.

Dodatni modeli koje predstavljamo uključuju Samuelsonovu analizu tržišne ravnoteže u uvjetima potražnje i ponude. Neki modeli uključuju vremenske

odgode u akumulaciji kapitala i proizvodnji, no oni su obrađeni kraće zbog složenosti analize.

Iako popis predstavljenih modela nije potpun, pruža dobar pregled načina na koji su matematičke metode oblikovale ekonomsko mišljenje o rastu tijekom 20. stoljeća.

1.1 Harrod-Domarov model

Model Harrod-Domar neovisno su razvili Roy Harrod [4] i Evsey Domar [2], prvotno s ciljem analize poslovnih ciklusa. Kasnije je korišten za objašnjenje stope rasta gospodarstva kroz štednju i produktivnost kapitala.

Proizvodnja Y promatra se kao funkcija zaliha kapitala K, tj. $Y = Y(K)$, a granična produktivnost kapitala definirana je kao:

$$\frac{dY}{dK} = c = \text{konstanta}. \tag{1.1}$$

Model predlaže da je stopa rasta proizvodnje dana izrazom:

$$\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt} = sc - \delta, \tag{1.2}$$

gdje su:

- s — stopa štednje,
- c — granična produktivnost kapitala (konstanta),
- δ — stopa amortizacije kapitala.

Rješenje ove homogene linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda je:

$$Y(t) = Y_0 e^{(sc-\delta)t} \tag{1.3}$$

što jasno pokazuje da povećanje ulaganja kroz štednju i produktivnost potiče gospodarski rast. Međutim, model ne uzima u obzir radnu snagu niti veličinu populacije.

1.2 Solowov model

Robert Solow [9] predlaže jednadžbu gospodarskog rasta koja uključuje proizvodnju, rast kapitala i rast radne snage, što nedostaje u Harrod–Domarovom modelu. Uvedimo osnovne pojmove i pretpostavke modela:

i) **Proizvodna funkcija:** u oznaci Y, je količina proizvedenih dobara uz K jedinica kapitala i L jedinica rada u trenutku t. Njegova ovisnost o tim parametrima opisana je funkcijom F:

$$Y(t) = F(K(t), L(t))$$

U zatvorenoj ekonomiji, sva dobra se troše ili investiraju:

$$Y(t) = C(t) + I(t)$$

gdje su $C(t)$ i $I(t)$ funkcije potrošnje i investicija. Postavljaju se tzv. **Inadina ograničenja:**

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial F}{\partial L} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$$

$$\lim_{K\to 0} \frac{\partial F}{\partial K} = \infty, \quad \lim_{L\to 0} \frac{\partial F}{\partial L} = \infty, \quad \lim_{K\to \infty} \frac{\partial F}{\partial K} = 0, \quad \lim_{L\to \infty} \frac{\partial F}{\partial L} = 0.$$

Pretpostavlja se homogenost funkcije stupnja 1 (konstantni prinosi na razmjer):

$$F(\alpha K, \alpha L) = \alpha F(K, L), \ \forall \alpha > 0.$$

Definiraju se $y = \frac{Y}{L}$, $k = \frac{K}{L}$, pa se dobiva jednodimenzionalna proizvodna funkcija $y = f(k)$.

ii) **Rast kapitala:** Investicija uključuje promjenu kapitala i amortizaciju:

$$I(t) = \frac{dK}{dt} + \delta K(t)$$

što nas vodi do per capita jednadžbe:

$$y(t) = c(t) + i(t) = c(t) + \frac{dk}{dt} + \left(\delta + \frac{1}{L}\frac{dL}{dt}\right) k.$$

iii) **Rast radne snage:** Radna snaga raste eksponencijalno:

$$L(t) = L_0 e^{nt}.$$

Osnovna diferencijalna jednadžba rasta kapitala po radniku:

$$\frac{dk}{dt} = f(k) - (\delta + n)k - c(t). \tag{1.4}$$

Ako se stalni udio dohotka štedi (s), $c(t) = (1 - s)f(k)$, tada imamo:

$$\frac{dk}{dt} = sf(k) - (\delta + n)k.$$

iv) **Cobb–Douglas funkcija:**

$$f(k) = Ak^{\beta}, \quad 0 < \beta < 1$$

Parametar β označava udio kapitala u ukupnom outputu, dok $1 - \beta$ predstavlja udio rada.

- Ako je $\beta \approx 1$, proizvodnja ovisi gotovo isključivo o kapitalu, a doprinos rada je zanemariv.
- Ako je $\beta \approx 0$, tada je rad glavni faktor proizvodnje, a kapital ima vrlo mali utjecaj.

Tipične vrijednosti u stvarnim gospodarstvima su $\beta \in (0.3, 0.5)$.

Ravnoteža se postiže kada je $\frac{dk}{dt} = 0$ u osnovnoj jednadžbi rasta kapitala po radniku (1.4):

$$k^* = \left(\frac{sA}{\delta + n}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}, \quad y^* = Ak^{*\beta}$$

v) **Tehnološki napredak:** Pretpostavimo egzogeni (vanjski) tehnološki napredak koji se odvija konstantnom stopom $g > 0$, tako da vrijedi:

$$A(t) = A_0 e^{gt},$$

gdje je $A(t)$ ukupni faktor produktivnosti, a g predstavlja stopu rasta tehnologije. Tehnološki napredak u ovom kontekstu povećava efikasnost rada, tako da se proizvodnja po radniku povećava iako količina kapitala i rada ostaje ista.

Uvedimo *efektivni kapital po radniku* kao:

$$k(t) = \frac{K(t)}{A(t)L(t)},$$

gdje je $K(t)$ fizički kapital, $L(t)$ radna snaga, a $A(t)L(t)$ označava broj *efektivnih jedinica rada* (rad prilagođen tehnologiji).

U ovom slučaju, dinamika efektivnog kapitala opisana je sljedećom diferencijalnom jednadžbom:

$$\frac{dk}{dt} = sAk^{\beta} - (\delta + n + g)k,$$

gdje su:

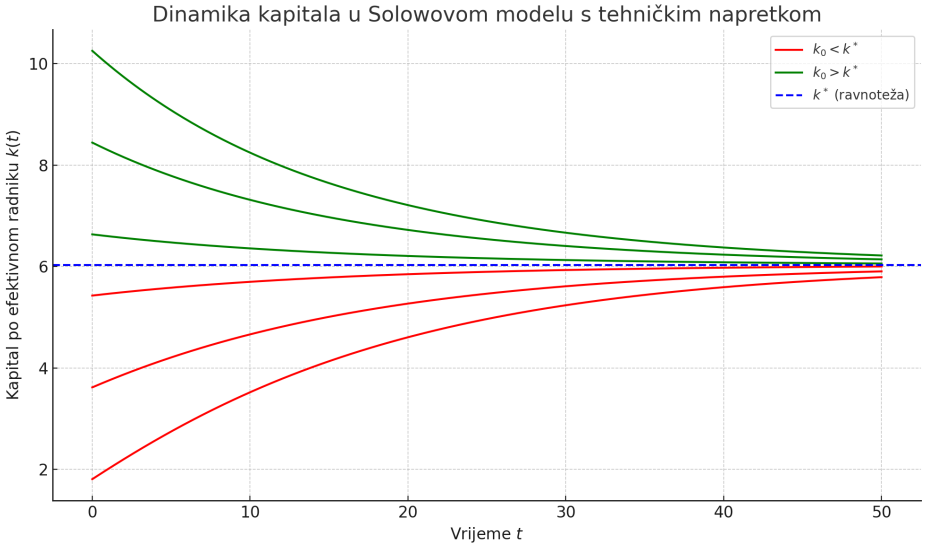
- s – stopa štednje (udio dohotka koji se ulaže),
- δ – stopa amortizacije kapitala,
- n – stopa rasta radne snage,

- g – stopa tehnološkog napretka.

Ravnotežno stanje (stacionarna točka) k^* nastaje kada je $\frac{dk}{dt} = 0$, tj. kada se efektivni kapital po radniku više ne mijenja. Tada vrijedi:

$$k^* = \left(\frac{sA}{\delta + n + g}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}, \quad y^* = Ak^{*\beta}.$$

Analiza dinamike:



Slika 1.1: Dinamika kapitala u Solowovu modelu s tehničkim napretkom

- Ako je $k(t) < k^*$, tada je $\frac{dk}{dt} > 0$, što znači da kapital po radniku raste prema ravnotežnom stanju, kao što se vidi na Slika 1.1.
- Ako je $k(t) > k^*$, tada je $\frac{dk}{dt} < 0$, što znači da kapital po radniku opada prema ravnotežnom stanju (Slika 1.1).

Dakle, točka k^* je **stabilna ravnoteža**. Sustav gravitira prema toj točki neovisno o početnoj razini kapitala (dokle god je $k(t) > 0$).

vi) **Solowov ostatak:**

$$\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt} = \beta\frac{1}{K}\frac{dK}{dt} + (1-\beta)\frac{1}{L}\frac{dL}{dt} + (1-\beta)\frac{1}{A}\frac{dA}{dt}$$

$$\text{Solowov ostatak} = \frac{1}{Y}\frac{dY}{dt} - \beta\frac{1}{K}\frac{dK}{dt} - (1-\beta)\frac{1}{L}\frac{dL}{dt}$$

Pozitivan ostatak ukazuje na rast uzrokovan tehnološkim napretkom koji nije izravno objašnjen rastom kapitala K ili rada L.

Važnost: Solowov ostatak omogućuje kvantificiranje doprinosa tehnologije ukupnom gospodarskom rastu. Bez njega, model bi podcijenio učinke inovacija, digitalizacije i organizacijskog znanja. Ako je ostatak blizu nule, ulaganja u tehnologiju nisu donijela mjerljiv doprinos produktivnosti. Suprotno tome, značajan pozitivan ostatak sugerira da su tehnološke inovacije ključni pokretači rasta.

Tehnologija, iako nemehanički faktor, ima kvantitativno mjerljiv učinak. Solowov ostatak zato predstavlja most između teorijske ekonomije i stvarnog mjerenja učinkovitosti resursa u gospodarstvu.

1.3 Phelpsovo zlatno pravilo

Phelps koristi neoklasični model rasta kako bi proučio potrošnju po jedinici rada u ravnoteži, u okviru tzv. „zlatnog pravila".

U ravnoteži, uz stopu rasta radne snage n, potrošnja po jedinici rada izražena je kao:

$$c(t) = f(k) - nk, \tag{1.5}$$

gdje je k kapital po radniku, a $f(k)$ proizvodna funkcija.

Maksimalna potrošnja po jedinici rada postiže se kada je derivacija potrošnje po k jednaka nuli:

$$\frac{dc}{dk} = \frac{df}{dk} - n = 0. \tag{1.6}$$

1.3. Phelpsovo zlatno pravilo

Budući da vrijedi:

$$\frac{d^2 f}{dk^2} < 0,$$

točka u kojoj je $\frac{df}{dk} = n$ predstavlja maksimum. Odatle slijedi tzv. „zlatno pravilo”:

Marginalna proizvodnost kapitala po radniku mora biti jednaka stopi rasta radne snage za maksimalnu potrošnju po glavi stanovnika.

Slika 1.2: Grafički prikaz Phelpsovog zlatnog pravila ($\beta = 0.3$, $A = 1$, $n \approx 0.2$; vrh na $k^* \approx 1.78$).

- Prikazana je funkcija potrošnje po radniku $c(k) = f(k) - nk$, gdje je $f(k) = Ak^\beta$ (Cobb–Douglasova funkcija).
- Crtkana crvena linija označava točku k^* koja maksimizira potrošnju po radniku – zlatno pravilo.
- Ako je $k < k^*$, dodatno ulaganje povećava potrošnju.

- Ako je $k > k^*$, dodatno ulaganje smanjuje potrošnju jer previše resursa ide na kapital, a premalo na osobnu potrošnju.

Maksimalna potrošnja po glavi stanovnika važna je jer predstavlja dugoročno najodrživiju ekonomsku ravnotežu. Ona osigurava optimalan omjer između ulaganja u kapital (za budući rast) i trenutne potrošnje (za standard života). Ako se štedi previše, smanjuje se sadašnja potrošnja; ako se štedi premalo, ugrožava se dugoročni rast. Zlatno pravilo definira optimalnu točku između tih ekstrema.

Zašto se zove **"zlatno pravilo"**?

Naziv je Phelpsov ("Golden Rule of Accumulation", 1961.)[8] kao metafora na etičko "zlatno pravilo" ("čini drugima što želiš da drugi tebi čine..."): štedi taman toliko da maksimiziraš dugoročnu potrošnju po osobi — tj. ne zakidaš sadašnju generaciju pretjeranom štednjom, niti buduću premalom štednjom.

1.4 Samuelsonov model tržišne ravnoteže

U svom radu iz 1941. godine Paul Samuelson primjenjuje jednostavne diferencijalne jednadžbe kako bi analizirao stabilnost tržišne ravnoteže u nekoliko scenarija odnosa ponude i potražnje.

Najjednostavnija analiza stabilnosti temelji se na pretpostavkama Walrasa i Marshalla.

1. Prema **Walrasovoj** pretpostavci, cijena raste (pada) ako je **višak potražnje** pozitivan (negativan).

2. Prema **Marshallovoj** pretpostavci, količina raste (pada) ako je **višak cijene potražnje** pozitivan (negativan).

1. **Višak potražnje** (engl. *excess demand*) definiran je kao:

$$\text{Višak potražnje} = D(p) - S(p)$$

gdje je:

- $D(p)$: količina koju kupci žele kupiti po cijeni p,
- $S(p)$: količina koju proizvođači žele prodati po cijeni p.

Čimbenik je **pozitivan** kada vrijedi:

$$D(p) > S(p)$$

odnosno kada kupci žele kupiti više nego što proizvođači žele prodati.

2. **Višak cijene potražnje** definiran je kao:

$$\text{Višak cijene potražnje} = p_D(q) - p_S(q)$$

gdje je:

- $p_D(q)$: cijena koju su kupci spremni platiti za količinu q,
- $p_S(q)$: cijena koju proizvođači zahtijevaju za količinu q.

Višak cijene potražnje je **pozitivan** kada vrijedi:

$$p_D(q) > p_S(q)$$

odnosno kada su kupci spremni platiti višu cijenu nego što proizvođači zahtijevaju.

Neka $D(p, \alpha)$ i $S(p)$ označavaju funkcije potražnje i ponude ovisne o cijeni p, gdje je α parametar koji označava „ukus“ potrošača. U ravnoteži vrijedi:

$$q^* = D(p^*, \alpha) = S(p^*), \tag{1.7}$$

pri čemu su parcijalne derivacije:

$$\frac{\partial D}{\partial \alpha} > 0, \quad \frac{\partial D}{\partial p} < 0. \tag{1.8}$$

Zadatak komparativne statistike je odrediti ravnotežne vrijednosti cijene i količine te njihovu osjetljivost na parametar α.

Walrasova dinamika

Dinamička formulacija Walrasove pretpostavke je:

$$\frac{dp}{dt} = f(D(p) - S(p)), \quad f(0) = 0, \quad f'(0) > 0. \tag{1.9}$$

Zadržavanjem prvog reda razvoja u Taylorov red u blizini ravnoteže p^*, dobivamo sljedeću linearnu diferencijalnu jednadžbu:

$$\frac{dp}{dt} = a_0 \left(\frac{dD}{dp} - \frac{dS}{dp} \right) \Bigg|_{p^*} (p - p^*), \tag{1.10}$$

čije je rješenje, za početnu cijenu p_0, dano izrazom:

$$p(t) = p^* + (p^* - p_0) \cdot \exp \left[a_0 t \left(\frac{dD}{dp} - \frac{dS}{dp} \right) \Bigg|_{p^*} \right]. \tag{1.11}$$

Ravnoteža je stabilna ako:

$$\frac{dD}{dp} \Bigg|_{p^*} < \frac{dS}{dp} \Bigg|_{p^*}. \tag{1.12}$$

Odnosno, cijena se može stabilizirati kad potražnja raste sporije od ponude.

Dinamička formulacija Marshallove pretpostavke glasi:

$$\frac{dq}{dt} = g(p_D(q) - p_S(q)), \quad g(0) = 0, \quad g'(0) > 0. \tag{1.13}$$

1.4. Samuelsonov model tržišne ravnoteže

Zanemarujući više redove razvoja i koristeći trivijalni rezultat iz elementarnog računanja:

$$\frac{dp_D}{dq} = \frac{1}{\frac{dD}{dp}}, \quad \frac{dp_S}{dq} = \frac{1}{\frac{dS}{dp}},$$

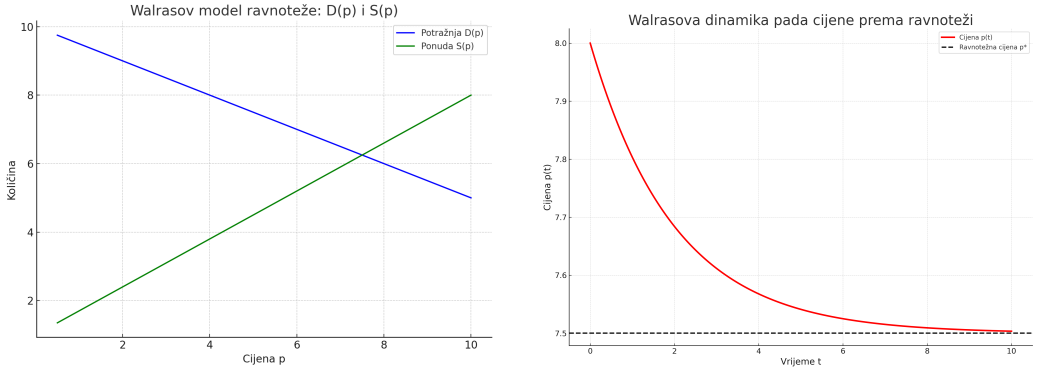
dobivamo:

$$q(t) = q^* + (q^* - q_0) \cdot \exp\left[b_0 t \left(\frac{1}{\frac{dD}{dp}} - \frac{1}{\frac{dS}{dp}} \right)_{q^*} \right]. \tag{1.14}$$

Ravnoteža je stabilna ako:

$$\left. \frac{1}{\frac{dD}{dp}} \right|_{q^*} < \left. \frac{1}{\frac{dS}{dp}} \right|_{q^*}. \tag{1.15}$$

Odnosno, količina ponude mora rasti kad raste potražnja, dok promjena cijene ovisi o algebarskom znaku nagiba krivulje ponude.



(a) Ponuda i potražnja (b) Dinamika cijene

Slika 1.3: Walrasov model i prilagodba cijene

1.5 Kaleckijev model s odgođenom investicijom

Kalecki je prvi istraživao odnos između kašnjenja u proizvodnji i endogenih poslovnih ciklusa, promatrajući zatvoreni ekonomski sustav kroz kratkoročno razdoblje bez trenda.

Neka je $A(t)$ bruto akumulacija kapitala (nepotrošena dobra), a svaka investicija $I(t)$ ima razdoblje realizacije, tzv. *gestation period* θ. Isporuke $L(t)$ su jednake narudžbama investicija koje su postavljene θ vremena ranije:

$$L(t) = I(t - \theta). \tag{1.16}$$

Narudžbe postavljene u vremenskom intervalu $[t-\theta, t]$ ostaju neizvršene. Bruto akumulacija kapitala $A(t)$ jednaka je srednjoj vrijednosti narudžbi tijekom razdoblja θ:

$$A(t) = \frac{1}{\theta} \int_{t-\theta}^{t} I(\tau)\, d\tau. \tag{1.17}$$

Ako je $K(t)$ ukupna zaliha kapitala, a U fizička amortizacija, tada dinamika kapitala glasi:

$$\frac{dK}{dt} = L(t) - U = I(t - \theta) - U. \tag{1.18}$$

Stopa promjene investicija određena je konstantama $m > 0$ i $n > 0$ kao:

$$\frac{dI}{dt} = m\frac{dA}{dt} - n\frac{dK}{dt} = \frac{m}{\theta}[I(t) - I(t - \theta)] - n[I(t - \theta) - U]. \tag{1.19}$$

Uvedimo $J(t) = I(t) - U$ kao odstupanje investicija od konstantne razine potrebne za obnovu dotrajalog kapitala. Diferenciranjem dobivamo:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{m}{\theta}[J(t) - J(t-\theta)] - nJ(t-\theta), \tag{1.20}$$

Što se može zapisati kao:

$$\theta\frac{dJ}{dt} + (n\theta + m)J(t-\theta) - mJ(t) = 0. \tag{1.21}$$

U početnom intervalu $t \in [-\theta, 0]$ Kalecki pretpostavlja $J(t) = 0$. Standardni način rješavanja ove diferencijalne jednadžbe s kašnjenjem je pretpostavka oblika rješenja:

$$J(t) = De^{\alpha t}, \tag{1.22}$$

gdje su D i $\alpha \in \mathbb{C}$ konstante koje se određuju uvrštavanjem.

Opće rješenje jednadžbe je, za neke konstante c_1 i c_2:

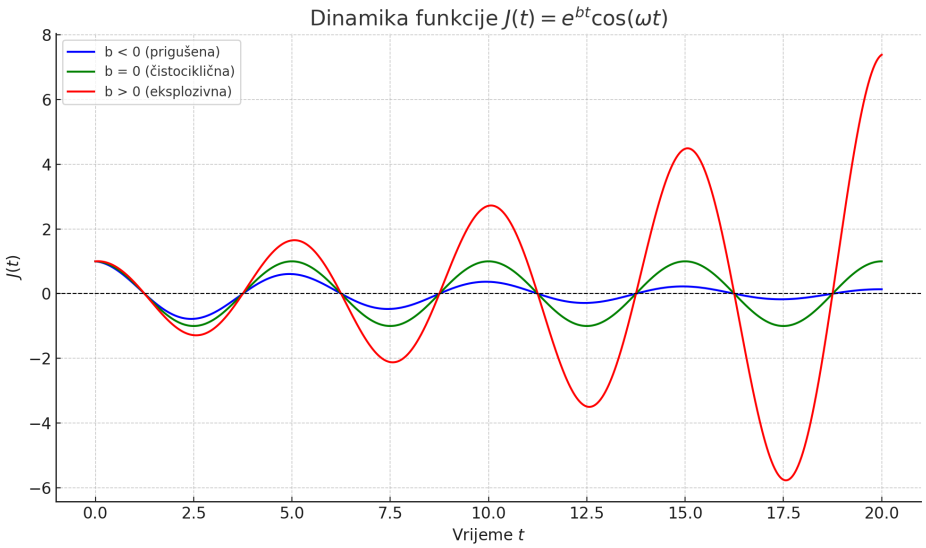
$$J(t) = e^{bt}\left[c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t)\right], \tag{1.23}$$

gdje je znak realnog parametra b presudan za ponašanje sustava:

- $b > 0$ – **eksplozivna** dinamika,
- $b = 0$ – **čistociklična** dinamika,
- $b < 0$ – **prigušena** oscilacija.

1.6 Goodwinov nelinearni model poslovnih ciklusa

Funkcija akceleracije investicija. Pretpostavlja se da inducirani investicijski izdaci O_i nastaju s odgodom θ kao nelinearna funkcija trenutne stope



Slika 1.4: Dinamika funkcije $J(t)$

rasta dohotka:

$$O_i(t+\theta) = \varphi\big(\dot{y}(t)\big).$$

Funkcija φ zove se *funkcija akceleracije*; tipično vrijedi $\varphi(0) = 0$ i $\varphi'(0) > 0$, a $\varphi'(0)$ nazivamo *marginalnim akceleratorom* (osjetljivost investicija na mali rast dohotka). U linearnom slučaju $\varphi(\dot{y}) = \mu\,\dot{y}$ s $\mu > 0$.

Goodwin je predstavio nelinearni model poslovnih ciklusa s vremenskim kašnjenjima između investicijskih odluka i stvarnih izdataka. Promjena dohotka $y(t)$ u vremenu t inducira investicijske izdatke $O_i(t+\theta)$ u kasnijem trenutku $t+\theta$.

$$O_i(t+\theta) = \varphi\left(\frac{dy}{dt}\right) = \varphi(\dot{y}). \tag{1.24}$$

Stoga, nelinearna diferencijalna jednadžba s kašnjenjem koja modelira razvoj dohotka glasi:

$$\varepsilon\frac{d}{dt}y(t+\theta) + (1-\alpha)y(t+\theta) = O(t) + \varphi(\dot{y}), \tag{1.25}$$

gdje je $O(t)$ autonomna investicija, a ε, α konstante. Derivacija $\frac{d\varphi(\dot{y})}{d\dot{y}}$ opisuje stopu rasta investicija u odnosu na rast dohotka i naziva se *koeficijent akceleracije*.

Razvijanjem vodećih članova u Taylorov red i zanemarivanjem viših redova, Goodwin dobiva:

$$\varepsilon\theta\frac{d^2y}{dt^2} + [(1-\alpha)\theta + \varepsilon]\frac{dy}{dt} + (1-\alpha)y(t) - \varphi(\dot{y}) = O(t). \tag{1.26}$$

Pretpostavlja se da je $O(t)$ konstanta: $O(t) = O^*$. Uvodi se nova varijabla:

$$z(t) = y(t) - \frac{O^*}{1-\alpha}, \tag{1.27}$$

pri čemu je $\frac{O^*}{1-\alpha}$ dohodak u ravnoteži.

Transformirana jednadžba postaje:

$$\varepsilon\theta\frac{d^2z}{dt^2} + [(1-\alpha)\theta + \varepsilon]\frac{dz}{dt} - \varphi'(\dot{z}) + (1-\alpha)z = 0. \tag{1.28}$$

Asimptotsko ponašanje ravnoteže $z = 0$ određuje se karakterističnom jednadžbom:

$$\varepsilon\theta\lambda^2 + [(1-\alpha)\theta + \varepsilon - \varphi'(0)]\lambda + (1-\alpha) = 0. \tag{1.29}$$

Karakteristična rješenja su:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\varphi'(0) - [(1-\alpha)\theta + \varepsilon] \pm \sqrt{((1-\alpha)\theta + \varepsilon - \varphi'(0))^2 - 4\varepsilon\theta(1-\alpha)}}{2\varepsilon\theta}. \tag{1.30}$$

Budući da:

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{1-\alpha}{\varepsilon\theta} > 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\varphi'(0) - [(1-\alpha)\theta + \varepsilon]}{\varepsilon\theta}, \tag{1.31}$$

vrijedi:

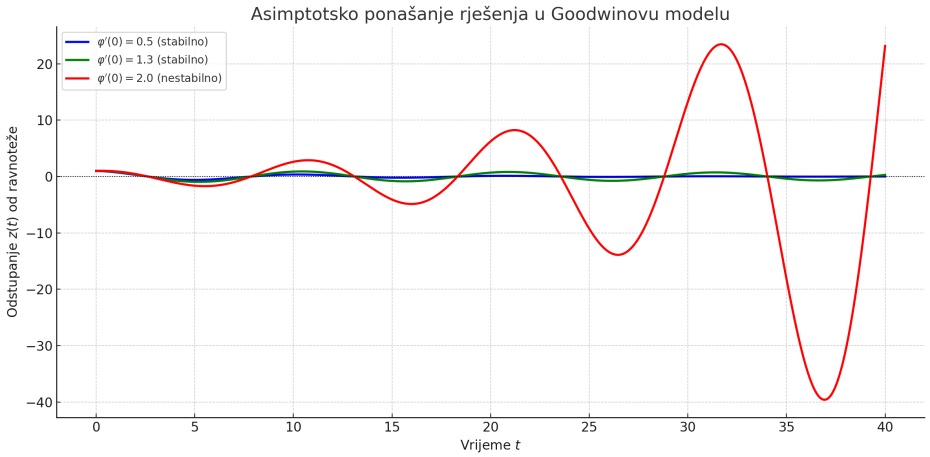
- Ako $\varphi'(0) < (1-\alpha)\theta + \varepsilon$, rješenja su prigušene oscilacije (stabilnost),
- Ako $\varphi'(0) > (1-\alpha)\theta + \varepsilon$, sustav je nestabilan i udaljava se od ravnotože.

1.7 Primjer: Dinamičko ponašanje u Goodwinovom modelu

Na slici 1.5 prikazano je ponašanje rješenja $z(t)$ za različite vrijednosti derivacije funkcije akceleracije $\varphi'(0)$:

- Za $\varphi'(0) < (1-\alpha)\theta + \varepsilon$, sustav pokazuje **prigušene oscilacije** i vraća se prema ravnoteži.
- Za $\varphi'(0) = (1-\alpha)\theta + \varepsilon$, sustav je na **granici stabilnosti**.
- Za $\varphi'(0) > (1-\alpha)\theta + \varepsilon$, sustav je **nestabilan** i udaljava se od ravnotože.

1.7. Primjer: Dinamičko ponašanje u Goodwinovom modelu



Slika 1.5: Asimptotsko ponašanje rješenja $z(t)$ u Goodwinovom modelu za različite vrijednosti $\varphi'(0)$.

Poglavlje 2

Primjena diferencijalnih jednadžbi u optimiranju dobiti

2.1 Model rasta bruto domaćeg proizvoda (BDP)

Diferencijalne jednadžbe često se koriste za modeliranje promjena bruto domaćeg proizvoda (BDP) kroz vrijeme. Pretpostavimo da je $x(t)$ vrijednost BDP-a u trenutku t. Ako je stopa promjene BDP-a proporcionalna njegovoj trenutnoj vrijednosti, tada vrijedi:

$$\frac{dx(t)}{dt} = g \cdot x(t), \tag{2.1}$$

gdje je g konstanta koja predstavlja stopu rasta.

Rješenjem ove obične diferencijalne jednadžbe prvog reda (separabilne i linearno homogene) dobijemo:

$$\frac{1}{x(t)}\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\ln x(t) = g, \tag{2.2}$$

što vodi na:

$$\ln x(t) = gt + c, \tag{2.3}$$

gdje je c integracijska konstanta. Ekvivalentno, uzimanjem eksponencijale obje strane:

$$x(t) = e^c e^{gt}. \tag{2.4}$$

Ako postavimo $x(0) = e^c$, tada konačno rješenje glasi:

$$x(t) = x(0)e^{gt}. \tag{2.5}$$

Ova formula pokazuje da BDP eksponencijalno raste ako je $g > 0$, odnosno opada ako je $g < 0$.

2.2 Model investiranja poduzeća

Razmotrimo racionalno upravljano poduzeće u konkurentnoj industriji koje maksimizira sadašnju vrijednost budućih neto novčanih tokova. Neka $P(t)$ označava cijenu proizvoda u vremenu t, $w(t)$ nadnicu, $L(t)$ količinu rada, a $C(I)$ trošak investiranja pri bruto stopi investicije I. Pretpostavimo da:

$$C(I) = q_0 I + q_1 I^2, \tag{2.6}$$

što uključuje linearni i kvadratni dio investicijskih troškova.

Neka $F(K, L)$ označava proizvodnu funkciju ovisnu o kapitalu K i radu L. Bruto investicija I sastoji se od promjene kapitala i potrebne zamjenske investicije, gdje je stopa amortizacije konstantna:

$$I = \dot{K} + D(K), \quad D(K) = \delta K. \tag{2.7}$$

Sadašnja vrijednost firme dana je izrazom (V su budući novčani tokovi):

$$V = \int_0^\infty e^{-R(t)}[P(t)F(K, L) - w(t)L(t) - C(I)]dt, \tag{2.8}$$

gdje je $e^{-R(t)} = \exp\left(-\int_0^t r(\tau)d\tau\right)$ diskontni faktor, a $r(\tau)$ trenutna kamatna stopa.

Kako bi se maksimizirao V, koriste se Euler–Lagrangeove jednadžbe:

$$e^{-R(t)}\left(P\frac{\partial F}{\partial L}-w\right)=0. \tag{2.9}$$

$$e^{-R(t)}\left(P\frac{\partial F}{\partial K}-(r+\delta)\,C'(I)+C''(I)\left(\ddot{K}+\delta\,\dot{K}\right)\right)=0. \tag{2.10}$$

Iz prve jednadžbe slijedi da granični produkt rada mora biti jednak nadnici:

$$\frac{\partial F}{\partial L}=\frac{w}{P}\Rightarrow\frac{K}{L}=F_L^{-1}\left(\frac{w}{P}\right). \tag{2.11}$$

Granični produkt kapitala F_K također ovisi o omjeru kapitala i rada, pa vrijedi:

$$PF_K(K,L)=PF_K\left(\frac{K}{L}\right)=PF_K\left(F_L^{-1}\left(\frac{w}{P}\right)\right). \tag{2.12}$$

Budući da vrijedi $I(t)=\dot{K}_P+\delta K$, jednadžba se može zapisati kao obična diferencijalna jednadžba:

$$\dot{I}-(r(t)+\delta)I=-f(t), \tag{2.13}$$

gdje je

$$f(t)=\frac{PG(t)-q_0(r(t)+\delta)}{2q_1}. \tag{2.14}$$

Ova jednadžba opisuje dinamiku optimalnog investiranja u vremenu. Riječ je o nehomogenoj diferencijanoj jednadžbi oblika:

Propozicija 2.1 *Neka su $g,q\colon I\to\mathbb{R}$ neprekidne funkcije na intervalu $I\subset\mathbb{R}$. Tada opće rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$\dot{P}(t)+g(t)P(t)=q(t)$$

dano je izrazom:

$$P(t)=C\cdot\exp\left(-\int_{t_0}^{t}g(s)\,ds\right)+\left[\int_{t_o}^{t}q(x)\cdot\exp\left(\int_{t_0}^{x}g(s)\,ds\right)dx\right]\cdot\exp\left(-\int_{t_0}^{t}g(s)\,ds\right), \tag{2.15}$$

gdje su $C\in\mathbb{R}$ i $t_0\in I$ konstante.

Dokaz. Rješenje homogene jednadžbe

$$\dot{P}(t) + g(t)P(t) = 0$$

ima oblik:

$$P(t) = c \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds\right).$$

Zamjenjujemo konstantu c funkcijom $c(t)$, pa koristeći metodu varijacije konstanti pretpostavljamo rješenje nehomogene jednadžbe:

$$P(t) = c(t) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds\right).$$

Deriviramo obje strane po t:

$$\begin{aligned}\dot{P}(t) &= \dot{c}(t) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds\right) - c(t) \cdot g(t) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds\right)\\ &= [\dot{c}(t) - g(t)c(t)] \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds\right).\end{aligned}$$

Zato:

$$\dot{P}(t) + g(t)P(t) = \dot{c}(t) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds\right).$$

Po diferencijalnoj jednadžbi imamo $q(t) = \dot{P}(t) + g(t)P(t)$, pa:

$$\dot{c}(t) = q(t) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds\right).$$

Integriranjem:

$$c(t) = C + \int_{t_0}^{t} q(x) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{x} g(s)\,ds\right) dx.$$

Uvrštavanjem u izraz za $P(t)$ završavamo dokaz. ■

2.3 Primjena propozicije 1: Optimalna investicijska politika

Gupta i sur.(2007) [5] primjenjuju propoziciju 1 za rješavanje problema optimalne politike isplate dividendi. Na temelju Propozicije 1, opće rješenje

jednadžbe

$$\dot{I}(t) - (r(t) + \delta)I(t) = -f(t)$$

glasi:

$$I(t) = I_0 \cdot \exp\left(-\int_t^{t_0} [r(\tau) + \delta]\, d\tau\right) + \int_t^{t_0} f(s) \cdot \exp\left(-\int_t^{s} [r(\tau) + \delta]\, d\tau\right) ds, \tag{2.16}$$

gdje rješenje prolazi točkom (t_0, I_0).

Ako pretpostavimo vremenski beskonačni horizont, specifično rješenje koje maksimizira sadašnju vrijednost V je:

$$I(t) = \int_t^{\infty} f(s) \cdot \exp\left(-\int_t^{s} [r(\tau) + \delta]\, d\tau\right) ds. \tag{2.17}$$

Polazimo od linearne ODJ prvog reda (definicija investicije)

$$\dot{K}(t) + \delta\, K(t) = I(t). \tag{2.18}$$

Pomnožimo jednadžbu s integrirajućim faktorom $e^{\delta t}$:

$$e^{\delta t}\dot{K}(t) + \delta\, e^{\delta t} K(t) = e^{\delta t} I(t). \tag{2.19}$$

Primijetimo da je lijeva strana derivacija produkta (pravilo umnoška):

$$\frac{d}{dt}\big(e^{\delta t} K(t)\big) = e^{\delta t} I(t). \tag{2.20}$$

Integriramo obje strane od t_0 do t:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds}\big(e^{\delta s} K(s)\big)\, ds = \int_{t_0}^{t} e^{\delta s} I(s)\, ds. \tag{2.21}$$

Po Newton-Leibnizovoj formuli dobivamo:

$$e^{\delta t} K(t) - e^{\delta t_0} K(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{\delta s} I(s)\, ds. \tag{2.22}$$

Rješavanjem po $K(t)$:

$$K(t) = e^{-\delta t}\, e^{\delta t_0} K(t_0) \;+\; e^{-\delta t} \int_{t_0}^{t} e^{\delta s} I(s)\, ds. \tag{2.23}$$

Na koncu, preuredimo zapis (iznesemo $e^{-\delta t}$ pod integral):

$$K(t) = K(t_0)\, e^{-\delta(t - t_0)} \;+\; \int_{t_0}^{t} e^{-\delta(t-s)}\, I(s)\, ds. \tag{2.24}$$

Poglavlje 3

Zaključak

Kroz ovaj rad prikazali smo kako se obične diferencijalne jednadžbe koriste za modeliranje osnovnih i složenijih ekonomskih procesa. Korištenjem matematičkih modela temeljnih na ODJ, poput modela Harroda-Domara, Solowa i Phelpsa, omogućeno je kvantitativno razumijevanje rasta proizvodnje (engl. outputa), uložene štednje i akumulacije kapitala.

S druge strane, modeli s vremenskim kašnjenjem, koje su predložili Kalecki i Goodwin, ilustriraju kako kašnjenja u investicijskim odlukama i njihovoj realizaciji mogu dovesti do cikličnih ponašanja i nestabilnosti. Uvidi u takve modele ključni su za razumijevanje endogene prirode poslovnih ciklusa.

Modeli razmatrani u ovom radu ne iscrpljuju sve mogućnosti primjene ODJ u ekonomiji, no pokazuju kako je diferencijalni pristup nezaobilazan u analizi dugoročne stabilnosti i dinamičke ravnoteže ekonomskih sustava. U budućnosti, kombinacija determinističkih i stohastičkih metoda može ponuditi još preciznije modele i dublje razumijevanje kompleksnih ekonomskih pojava.

Literatura

[1] Daron Acemoglu. *Introduction to Modern Economic Growth*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.

[2] Evsey David Domar. Capital expansion, rate of growth, and employment. *Econometrica*, 14(2):137–147, 1946.

[3] Giancarlo Gandolfo. *Economic Dynamics*. Springer 4 izdanje, Berlin, 2010.

[4] Roy Forbes Harrod. An essay in dynamic theory. *The Economic Journal*, 49(193):14–33, 1939.

[5] Manak C. Gupta i Alice C. Lee i Cheng-Few Lee. Effectiveness of dividend policy under the capital asset pricing model: A dynamic analysis. 2007.

[6] William Allen Brock i Anastasios George Malliaris. *Differential Equations, Stability and Chaos in Dynamic Economics*. North-Holland, Amsterdam, 1989.

[7] Cheng-Few Lee i Jim Junmin Shi. Application of alternative ode in finance and economics research. *Handbook of Quantitative Finance and Risk Management*. Springer, Boston, str. 1293–1300, 01 2010.

Literatura

[8] Edmund Strother Phelps. The golden rule of accumulation: A fable for growthmen. *The American Economic Review*, 51(4):638–643, 1961.

[9] Robert Merton Solow. A contribution to the theory of economic growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 70(1):65–94, 1956.

[10] Anastasios Tsoularis. On some important ordinary differential equations of dynamic economics. Editor Bruno Carpentieri, Recent Developments in the Solution of Nonlinear Differential Equations, poglavlje 10, IntechOpen, Rijeka, 2021.